

# I SPRACOVANIE NAMERANÝCH ÚDAJOV

## I - 1 Chyby merania

### I - 1.1 Absolútne a relatívne chyby priamych meraní

Pri zisťovaní hodnoty nejakej veličiny alebo kvantitatívnom vyjadrení stavu určitého procesu zvyčajne treba vykonať príslušné merania. Pri opakovaní merania, prípadne pri použití iných meracích zariadení alebo rôznych metód, resp. pri iných pozorovateľoch možno zistiť, že výsledky sa navzájom líšia a teda že sa nemôžu ani presne zhodovať so skutočnou hodnotou meranej veličiny. Rozdiel medzi skutočnou hodnotou  $x^0$  a nameranou hodnotou  $x$  určuje chybu jednotlivého merania

$$\varepsilon = x^0 - x \quad (\text{I-1})$$

Chyby merania majú rôzne príčiny, ktoré sa uplatňujú súčasne, a tak sa jednotlivé nepresnosti hromadia do výslednej skutočnej absolútnej chyby merania, definovanej vzťahom (I-1) ako hodnota, ktorú treba k meraniu pripočítať, aby sme dostali skutočnú hodnotu  $x^0 = x + \varepsilon$ . Podľa príčin vzniku sa chyby merania dajú rozdeliť na tri základné skupiny:

1. Chyby systematické - vznikajú z príčin, ktoré majú svoj pôvod najmä v nevhodnej metóde, v nedokonalosti použitého prístroja a podobne. Výsledky merania ovplyvňujú sústavne a jednostranne. Nepresnosti z nich vyplývajúce treba odstrániť zdokonalením podmienok merania.
2. Chyby hrubé - vznikajú neopatrnosťou, prehliadnutím alebo náhlou poruchou v systéme „pozorovaný objekt - merací prístroj - pozorovateľ“. Výsledky merania ovplyvňujú jednorazovo. Hrubá chyba sa dá zistiť opakovaným (kontrolným) meraním. Pozorovanie s hrubou chybou treba nahradiť novým meraním, alebo ak to nie je možné, vylúčiť ho bez náhrady.
3. Chyby náhodné - vznikajú pôsobením celého radu nám neznámych alebo nepostrehnuteľných príčin a opakujú sa približne rovnako často so znamienkom kladným a záporným. Ich účinok na nameranú hodnotu nemožno úplne vylúčiť, ale možno ho zmenšiť niekoľkonásobným opakovaním merania. Náhodnosťou ich povahy je daný vzťah teórie chýb k počtu pravdepodobnosti.

Nech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sú výsledky  $n$ -násobne opakovaného merania veličiny  $x$  na tom istom zariadení. Nech meranie bolo usporiadané tak, že hrubé a systematické chyby boli vylú-

čené a že výsledky jednotlivých meraní sú rovnako spoľahlivé, čo býva v praxi zvyčajne splnené. Potom z daných výsledkov meraní sa dá určiť hodnota, ktorá sa najviac blíži ku skutočnej hodnote meranej veličiny. Podľa matematickej štatistiky je takouto hodnotou aritmetický priemer

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (\text{I-2})$$

Aritmetický priemer sa od skutočnej hodnoty tiež líši, lebo náhodné chyby sa pri konečnom počte nameraných hodnôt navzájom neeliminujú. Aj tak je aritmetický priemer z hľadiska matematickej štatistiky najlepším odhadom skutočnej hodnoty a najúplnejšie vyjadruje zhustenie informácie, ktorú obsahujú namerané hodnoty. Odchýlka  $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$  sa nazýva zdanlivá chyba  $i$ -tého merania. Súčet zdanlivých chýb sa zrejme rovná nule.

Meranie bude hodnoverné vtedy, keď namerané hodnoty sa dajú uzavrieť do úzkeho intervalu, čiže keď budú mať malý rozptyl. Podľa matematickej štatistiky je číselnou charakteristikou rozptylu smerodajná odchýlka

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)}} \quad (\text{I-3})$$

Pri veľkom počte nameraných hodnôt je výhodnejšie na výpočet týchto charakteristík použiť vzťahy (I-12) a (I-13).

Podľa matematickej štatistiky možno stanoviť pre danú množinu nameraných hodnôt taký interval  $\langle a, b \rangle$ , aby bolo veľmi pravdepodobné, že tento interval bude obsahovať aj skutočnú a nám neznámu hodnotu  $x$ , t. j. že bude platiť  $a \leq x \leq b$ . Pritom je

$$a = \bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad b = \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{I-4})$$

kde  $t_\alpha$  je tzv. 100 (1- $\alpha$ ) % kritická hodnota t-rozdelenia pravdepodobnosti. Interval s hranicami podľa (I-4) sa nazýva 100 (1- $\alpha$ ) % interval spoľahlivosti, pretože pravdepodobnosť toho, že hodnota  $x$  bude ohraničená číslami (I-4), sa rovná 1- $\alpha$ . Niekedy sa volí  $\alpha = 0,5$ , čo je matematický výraz pre neistotu (tzv. pravdepodobná chyba). Vtedy je totiž rovnako možné, že  $x$  bude ohraničené číslami (I-4), ako že nebude. Často sa volí  $\alpha = 0,01$ , čo je z pravdepodobnostného hľadiska pomerne vysoký stupeň istoty. Vtedy je číslo  $x$  ohraničené číslami (I-4) prakticky vždy a preto číslo  $t_{0,01} \frac{s}{\sqrt{n}}$  možno považovať za hodnotu medznej (krajnej) chyby.

Budeme ju označovať symbolom  $\kappa$  (kapa), pričom

$$\kappa = t_{0,01} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{I-5})$$

a v ďalšom budeme hovoriť len o chybe merania. Kritické hodnoty  $t_\alpha$  v závislosti od  $n$  sú uvedené v Prílohe 1. Potom výslednú hodnotu veličiny  $x$  možno zapísať aj v tvare

$$x = \bar{x} \pm t_{0,01} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{I-6})$$

Príslušnú chybu po vyčíslení treba zaokrúhliť na dve číslice a  $x$  písať len po to miesto, ktoré je ešte postihnuté chybou.

**Príklad 1.** Pri extrakcii kyseliny octovej z vodného roztoku *n*-butanolom sa zisťoval obsah kyseliny octovej v butanolovej vrstve titráciou lúhom. Kvôli presnejšiemu určeniu obsahu sa robilo päť paralelných meraní. Zistené hodnoty v hmotnostných percentách sú:

5,3 ; 5,2 ; 5,3 ; 5,1 ; 5,2

Vypočítajte aritmetický priemer a chybu zisteného obsahu kyseliny octovej.

**Riešenie:** Výpočet aritmetického priemeru podľa (I-2):

$$\bar{x} = \frac{5,3 + 5,2 + 5,3 + 5,1 + 5,2}{5} = \frac{26,1}{5} = 5,220$$

Výpočet smerodajnej odchýlky podľa (I-3):

$$s^2 = \frac{5(5,3^2 + 5,2^2 + 5,3^2 + 5,1^2 + 5,2^2) - (26,1)^2}{5 \cdot 4} = 0,07$$

Potom

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,07} = 8,367 \cdot 10^{-2}$$

Výpočet chyby: V Prílohe 1 nájdeme pre  $n-1 = 4$  hodnotu  $t_{0,01} = 4,604$ . Potom podľa (I-5) je

$$\kappa = 4,604 \frac{8,367 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{5}} = 0,17227$$

čiže  $\kappa = 0,17$ .

Správny obsah kyseliny octovej potom je  $(5,22 \pm 0,17) \% \text{ hm.}$ , alebo  $5,05 \leq x \leq 5,39$  v  $\% \text{ hm.}$

Pri hodnotách získaných jedným alebo dvoma meraniami nemožno chybu spoľahlivo vypočítať uvedeným spôsobom. Preto treba podľa presnosti použitej metódy a použitých prístrojov odhadnúť chybu tak, aby skutočná chyba (I-1) bola zaručene menšia než jej odhad. Napríklad pri meraní dĺžky meradlom s milimetrovým delením stupnice možno cvičeným okom a s lupou dosiahnuť presnosť až  $\pm 0,1 \text{ mm}$ . Pri dotykových meradlách sa na to používa nónius. Bežná presnosť je  $\pm 0,25 \text{ mm}$ . Naproti tomu pri meraní výšky vodného stĺpca diferenciálneho manometra pri určovaní tlaku v potrubí ťažko dosiahneme pri milimetrovom delení stupnice vyššiu presnosť než  $\pm 1 \text{ mm}$ , pretože v dôsledku náhodných tlakových pulzácií v

systéme výška stĺpca kvapaliny v manometri mierne kolíše. Ak sú pulzácie také veľké, že priame odčítanie výšky stĺpca je nerealizovateľné, potom strednú výšku kvapalinového stĺpca  $h_s$  odhadneme ako

$$h_s = \frac{h_{\min} + h_{\max}}{2} \quad (\text{I-7})$$

kde  $h_{\min}$  je minimálna a  $h_{\max}$  je maximálna výška kvapalinového stĺpca, ktoré neboli prekročené v dostatočne dlhom časovom intervale. Na ich určenie je vhodné použiť posuvný papierový pásik. Platnosť vzťahu (I-7) predpokladá, že náhodný pokles tlaku o  $\Delta P$  je rovnako pravdepodobný ako stúpnutie tlaku o  $\Delta P$ , a teda že sa vyskytujú v priemere rovnako často. Chyba takto stanovenej hodnoty  $h_s$  je

$$\kappa = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2} \quad (\text{I-8})$$

Ak pri číselnej hodnote získanej z literatúry nie je udaná chyba, predpokladáme, že chyba sa rovná polovici jednotky posledného platného miesta (tzv. tabuľková chyba). Za platné číslice považujeme aj nuly za desatinnou čiarkou, ak sú vypísané. Napríklad k tabuľkovej hodnote hustoty vody

$$\rho = 998,2 \text{ kg.m}^{-3}$$

určíme chybu  $\kappa = 0,5 \cdot 10^{-1} \text{ kg.m}^{-3} = 0,05 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Túto hodnotu dostaneme z predpokladu, že pre skutočnú hodnotu hustoty platí nerovnosť

$$998,15 \leq \rho \leq 998,25$$

a že hodnota 998,2 vznikla zaokrúhlením čísla nachádzajúceho sa medzi uvedenými hranicami. Čísla ležiace mimo tohto intervalu totiž nemožno správne zaokrúhliť na hodnotu 998,2. Ak by tá hustota bola zapísaná číslom 998,20, chyba by bola 0,005.

V súvislosti s používaním niektorých jednotiek SI sústavy treba poznamenať, že pri niektorých veľkých číselných hodnotách veličín môžu vzniknúť z hľadiska tabuľkových chýb nesprávne zápisy. Napríklad zo zápisu hodnoty tlaku 99500 Pa sa podľa predchádzajúceho určí tabuľková chyba 0,5 Pa, ktorá je pri bežne používaných barometroch iluzórna. Ak sú v tomto číselnom údaji správne iba prvé tri číslice (čiže tabuľková chyba má byť 50 Pa), treba hodnotu tlaku napísať v semilogaritmickom tvare  $9,95 \cdot 10^4$  Pa. Výhodné je použiť násobné jednotky, v tomto prípade 99,5 kPa.

Často sa dávajú do vzájomnej súvislosti rozličné veličiny. Kvôli porovnávaniu ich chýb a presnosti ich merania sa zavádza relatívna chyba, ktorá je definovaná ako podiel medznej chyby a skutočnej hodnoty, ktorá sa v prípade jej neznalosti nahrádza aritmetickým



príemerom, takže

$$\delta_x = \frac{\kappa_x}{\bar{x}} \quad (I-9)$$

Meranie je tým presnejšie, čím menšia je relatívna chyba. Často sa udáva stonásobok relatívnej chyby, čiže relatívna chyba v percentách. Pre meranie v príklade 1 je relatívna chyba

$$\delta = \frac{0,17}{5,22} = 0,0326, \text{ čiže } 3,3 \%$$

Každý merací prístroj poskytuje údaje apriórne zaťažené chybou, vyplývajúcou z konštrukcie prístroja. Táto chyba sa nazýva chyba prístroja a udáva ju výrobca, alebo ju možno zistiť porovnaním výsledkov merania s meraním na podstatne presnejšom (a teda aj podstatne drahšom) prístroji toho istého druhu. Niekedy, najmä pri elektrických meracích prístrojoch, sa udáva maximálna chyba, vzťahnutá na celú stupnicu prístroja. Nazýva sa trieda presnosti. Zadáva ju výrobca, ktorý zaručuje, že chyba prístroja nepresiahne túto hodnotu, ak sú dodržané všetky predpísané podmienky.

### I - 1. 2 Tabuľka náhodných čísel

Niekedy treba stanoviť určitú charakteristickú hodnotu súboru zloženého z veľkého počtu prvkov. Premerať každý prvok súboru je nielen namáhavé, ale i zbytočné a v prípade deštruktívnej povahy merania dokonca nemožné. Preto sa z takéhoto súboru robí náhodný výber prvkov.

Na vykonanie náhodného výberu z konečného základného súboru sa ako technická pomôcka veľmi často používa tabuľka náhodných čísel, ktorá zaručuje, aby každý prvok základného súboru mal rovnakú pravdepodobnosť, že bude vybratý. Tabuľka náhodných čísel obsahuje náhodný výber číslíc 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zo súboru, v ktorom každá číslica má pravdepodobnosť výberu  $p = 0,01$ , čiže predstavuje postupnosť výsledkov nezávislých pokusov, pri ktorých každý z možných výsledkov 0, 1, ..., 9 nastáva s pravdepodobnosťou 0,1.

Ak z daného súboru obsahujúceho  $N$  objektov sa má vybrať náhodný výber rozsahu  $n$  (teda výber má obsahovať  $n$  objektov), tabuľka náhodných čísel sa použije takto : Prvky súboru sa očísľujú od 0 po  $N-1$ . V tabuľke náhodných čísel začneme na ľubovoľnom mieste a čítame čísla s potrebným počtom miest, čím združujeme číslice do čísel (napríklad dvojmiestnych, trojmiestnych a podobne). Toto združenie číslic do niekoľkomiestnych čísel je v tabuľke náhodných čísel zvyčajne už urobené. Pritom postupujeme v poradí po riadkoch alebo po stĺpcoch. Nie je to síce potrebné, je to však prehľadnejšie. Do výberu zahrnieme tie prvky zá-

kladného súboru, ktorých priradené čísla nájdeme v tabuľke náhodných čísel. Od náhodného čísla väčšieho ako  $N-1$  odčítame najväčší celý násobok čísla  $N$ , ktorý je v ňom obsiahnutý a vyberieme prvok, priradené číslo ktorého sa rovná zvyšku po odčítaní. Tak postupujeme dovtedy, kým nemáme vo výbere  $n$  prvkov. Čísla, ktoré sa už raz vyskytli, vynechávame. Také čísla sa berú do úvahy len pri výbere s opakovaním, t. j. s vrátením každého prvku po premeraní späť do základného súboru. Časť tabuľky trojmiestnych náhodných čísel upravená podľa [29] je uvedená v Prílohe 2.

**Príklad 2.** Treba urobiť náhodný výber 10 prvkov zo súboru, ktorý obsahuje štyristo prvkov.

**Riešenie:** Tabuľku náhodných čísel použijeme tak, že po očíslovaní prvkov súboru od 000 po 399 začneme čítať čísla z Prílohy 2 napríklad od začiatku desiateho riadku. Vyberieme tieto čísla:

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 223 | 136 | 795 | 077 | 630 | 381 | 839 | 242 | 850 | 431 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Pretože niektoré čísla presahujú rozsah súboru, upravíme ich uvedeným spôsobom. Tak dostaneme:

|     |     |                  |     |                  |     |                    |     |                    |                  |
|-----|-----|------------------|-----|------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|------------------|
| 223 | 136 | 395              | 077 | 230              | 381 | 039                | 242 | 050                | 031              |
|     |     | odčítali sme 400 |     | odčítali sme 400 |     | odčítali sme 2x400 |     | odčítali sme 2x400 | odčítali sme 400 |

Do náhodného výberu teda vyberieme tie prvky základného súboru, ktorých priradené čísla, zoradené podľa veľkosti, sú:

|    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 31 | 39 | 50 | 77 | 136 | 223 | 230 | 242 | 381 | 395 |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

### I - 1.3 Intervalové rozdelenie početnosti

V prípade veľkého počtu opakovaných meraní (50 a viac) je často výhodné zatriediť jednotlivé navzájom blízke hodnoty do skupín, t. j. zostaviť intervalové rozdelenie početnosti. Jednotlivé skupiny sa nazývajú intervaly (triedy) a sú charakterizované šírkou intervalu (vzdialenosťou krajných bodov intervalu), triednym znakom (zvyčajne to býva stred intervalu) a početnosťou (počet hodnôt patriacich do intervalu). Takáto početnosť sa nazýva absolútna početnosť (absolútna frekvencia). Ak absolútnu početnosť delíme počtom všetkých meraní, dostaneme relatívnu početnosť (relatívnu frekvenciu). Často sa udáva stonásobok relatívnej frekvencie v percentách. Deliace body medzi intervalmi a triedne znaky sa volia ako okrúhle čísla spomedzi všetkých možných hodnôt sledovaného znaku. Šírku intervalu volíme zvyčajne rovnakú pre všetky intervaly a takú, aby počet intervalov bol medzi 10 a 20. V prípade, že počet meraní je približne 50, možno voliť 8 až 10 intervalov, aby sa zabezpečila vyššia počet-

nosť v intervaloch, a tým aj lepšia reprodukovateľnosť intervalového rozdelenia početnosti. Niekedy sa odporúča voliť počet intervalov  $k$  v závislosti od počtu meraní  $N$  podľa vzťahov

$$k \leq 5 \log N, \text{ resp. } k = \sqrt{N} \quad (\text{I-10})$$

Ak sú šírky intervalov rovnaké, medzi šírkou intervalu a počtom intervalov platí vzťah

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \quad (\text{I-11})$$

kde  $h$  je šírka intervalu,  $k$  je ich počet,  $x_{\max}$  a  $x_{\min}$  je najväčšia a najmenšia hodnota z radu hodnôt  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Ak z rovnice (I-11) voľbou šírky intervalu nedostaneme prirodzené číslo, počet intervalov sa vždy zaokrúhľuje nahor, pretože merania patriace do tej zlomkovej časti tvoria vlastne samostatný interval. Ak sa niektoré meranie presne zhoduje s hranicou dvoch intervalov, zvyčajne sa zaraduje do intervalu s väčším triednym znakom. Ak je takých meraní viac, vtedy sa polovica z nich zaradí do jedného intervalu a polovica do druhého intervalu.

Intervalové rozdelenie početnosti prehľadne informuje o rozložení jednotlivých hodnôt. Jeho grafickým znázornením je histogram, ktorý dostaneme tak, že nad každým intervalom zostrojíme obdĺžnik, ktorého plocha (v prípade rovnakej šírky intervalov výška) je úmerná početnosti.

Aritmetický priemer intervalového rozdelenia početnosti sa vypočíta podľa vzťahu

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^k f_i x_i \quad (\text{I-12})$$

a smerodajná odchýlka podľa vzťahu

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{I-13})$$

kde  $N$  je celkový počet meraní,

$k$  - počet triednych intervalov,

$n_i$  - absolútna frekvencia  $i$ -tého intervalu,

$f_i$  - relatívna frekvencia  $i$ -tého intervalu,

$x_i$  - triedny znak  $i$ -tého intervalu.

Příklad 3. Pri zisťovaní parametrov polydisperznej frakcie malých častíc bolo premeraných náhodne vybratých 50 častíc. Zistené hodnoty priemerov  $d[\text{mm}]$  usporiadané podľa veľkosti sú uvedené v tab. I-1.

Usporiadané hodnoty priemerov  $d$  polydisperznej frakcie častíc

Tabuľka I - 1

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,992 | 1,010 | 1,021 | 1,041 | 1,056 | 1,077 | 1,077 | 1,081 | 1,082 | 1,087 |
| 1,088 | 1,090 | 1,095 | 1,099 | 1,107 | 1,108 | 1,109 | 1,111 | 1,113 | 1,114 |
| 1,114 | 1,122 | 1,134 | 1,135 | 1,138 | 1,140 | 1,147 | 1,150 | 1,151 | 1,155 |
| 1,157 | 1,160 | 1,163 | 1,163 | 1,164 | 1,164 | 1,165 | 1,167 | 1,171 | 1,175 |
| 1,177 | 1,190 | 1,191 | 1,192 | 1,196 | 1,224 | 1,228 | 1,230 | 1,233 | 1,251 |

Vytvorte z týchto meraní intervalové rozdelenie početnosti, zostrojte histogram a vypočítajte aritmetický priemer a smerodajnú odchýlku.

**Riešenie:**

Podľa vzťahu (I-11) zistíme počet intervalov:

$$k = 5 \log 50 = 8,3, \text{ resp. } k \approx \sqrt{50} = 7,1$$

Pri voľbe  $k = 9$  dostaneme pre šírku intervalu

$$h = \frac{1,251 - 0,992}{9} = 0,0288$$

ktorú zaokrúhlime na  $h = 0,03$ . Vhodnou voľbou triedneho znaku prvého intervalu  $x_1 = 1,00$  možno hodnoty z tab. I-1 usporiadať do intervalového rozdelenia početnosti podľa tab. I-2.

Voľbou  $h = 0,025$  by sme dostali 11 intervalov, ale hranice intervalov, resp. triedne znaky by boli neokrúhle čísla. Ak by sme pri  $h = 0,03$  zvolili prvý interval napríklad  $<0,98 ; 1,01>$ , tak by posledný (deviaty) interval bol  $<1,22 ; 1,25>$  a hodnotu 1,251 by sme museli obsiahnuť až ďalším (desiatym), a teda zbytočným intervalom.

Intervalové rozdelenie početnosti priemerov polydisperznej frakcie

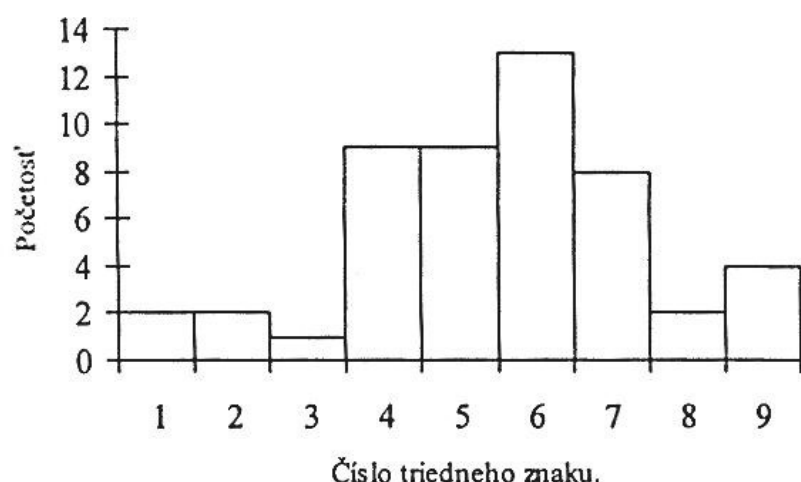
Tabuľka I - 2

| Číslo triedneho intervalu | Hranice triedneho intervalu | Triedny znak $x_i = d_i$ [mm] | Početnosť $n_i$ | Relatívna početnosť $f_i$ | Relatívna početnosť $f_i \cdot 100\%$ |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------|---------------------------|---------------------------------------|
| 1                         | 0,985 ; 1,015               | 1,000                         | 2               | 0,040                     | 4                                     |
| 2                         | 1,015 ; 1,045               | 1,030                         | 2               | 0,040                     | 4                                     |
| 3                         | 1,045 ; 1,075               | 1,060                         | 1               | 0,020                     | 2                                     |
| 4                         | 1,075 ; 1,105               | 1,090                         | 9               | 0,180                     | 18                                    |
| 5                         | 1,105 ; 1,135               | 1,120                         | 9               | 0,180                     | 18                                    |
| 6                         | 1,135 ; 1,165               | 1,150                         | 13              | 0,260                     | 26                                    |
| 7                         | 1,165 ; 1,195               | 1,180                         | 8               | 0,160                     | 16                                    |
| 8                         | 1,195 ; 1,225               | 1,210                         | 2               | 0,040                     | 4                                     |
| 9                         | 1,225 ; 1,255               | 1,240                         | 4               | 0,080                     | 8                                     |
| $\Sigma$                  |                             |                               | 50              | 1,000                     | 100                                   |

Z intervalového rozdelenia početnosti vidíme, že táto frakcia častíc nie je tak vysoko polydisperzná, pretože väčšina (78 %) častíc sa sústreďuje okolo triednych znakov 1,09

mm až 1,18 mm.

Histogram intervalového rozdelenia početnosti podľa tab. I-2 je na obr. I-1.



Obr. I-1. Histogram intervalového rozdelenia početnosti priemerov polydisperznej frakcie častíc

Aritmetický priemer podľa (I-12) je

$$\bar{d} = \frac{2 \cdot 1,00 + 2 \cdot 1,03 + 1 \cdot 1,06 + 9 \cdot 1,09 + 9 \cdot 1,12 + 13 \cdot 1,15 + 8 \cdot 1,18 + 2 \cdot 1,21 + 4 \cdot 1,24}{50} = 1,1356$$

takže  $\bar{d} = 1,1356$  mm.

Smerodajnú odchýlku vypočítame podľa (I-13):

$$s_d^2 = 0,04 \cdot 0,1356^2 + 0,04 \cdot 0,1056^2 + 0,02 \cdot 0,0756^2 + 0,18 \cdot 0,0456^2 + 0,18 \cdot 0,0156^2 + \\ + 0,26 \cdot 0,0144^2 + 0,16 \cdot 0,0444^2 + 0,04 \cdot 0,0744^2 + 0,08 \cdot 0,1044^2 = 0,003177 \text{ mm}^2$$

$$s_d = \sqrt{s_d^2} = \sqrt{0,003177} = 0,0564$$

takže  $s_d = 0,0564$  mm.

#### I - 1.4 Chyby funkcie meraných argumentov

Ak hľadaná veličina  $y$  je vyjadrená ako funkcia viacerých meraných veličín

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (\text{I-14})$$

pri znalosti chýb argumentov možno nájsť aj chybu veličiny  $y$ . V prípade jednoduchých závislostí možno odvodiť presné vzťahy pre chybu veličiny  $y$ . Napr. pre  $y = x_1 + x_2$ , resp.  $y = x_1 - x_2$  platí pre obidva prípady  $\kappa_y = \kappa_1 + \kappa_2$ . Podobne pre Reynoldsovo číslo pri prúdení tekutín v potrubí by bolo možné stanoviť interval jeho možných hodnôt  $\langle Re_{\min}, Re_{\max} \rangle$ , pričom

$$Re_{\min} = \frac{(d - \kappa_d)(w - \kappa_w)(\rho - \kappa_\rho)}{\mu + \kappa_\mu}$$



$$Re_{\max} = \frac{(d + \kappa_d)(w + \kappa_w)(\rho + \kappa_\rho)}{\mu - \kappa_\mu}$$

Potom by bolo možné stanoviť chybu

$$\kappa_{Re} = \frac{Re_{\max} - Re_{\min}}{2}$$

podobne ako pri vzťahu (I-8). Pri zložitejších tvaroch funkcie (napr. pri exponenciálnej funkcii, goniometrických funkciách) sa to nedá takto jednoducho riešiť a chyba funkcie sa vyjadruje pomocou chýb jej argumentov približne, a to podľa nasledujúcej úvahy.

Totálny diferenciál funkcie (I-14) je

$$dy = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_r} dx_r$$

Za predpokladu, že chyby argumentov sú malé, možno nimi nahradiť diferenciály argumentov, a tak dostaneme približný vzťah pre chybu funkcie

$$\kappa_y = \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \right| \kappa_1 + \left| \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| \kappa_2 + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial x_r} \right| \kappa_r \quad (\text{I-15})$$

a za predpokladu  $y > 0$  pre relatívnu chybu vzťah

$$\delta_y = \left| \frac{\partial \ln F}{\partial x_1} \right| \kappa_1 + \left| \frac{\partial \ln F}{\partial x_2} \right| \kappa_2 + \dots + \left| \frac{\partial \ln F}{\partial x_r} \right| \kappa_r \quad (\text{I-16})$$

Smerodajná odchýlka  $s_y$  veličiny  $y$  sa vypočíta z Gaussovho zákona hromadenia chýb:

$$s_y^2 = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} s_1 \right]^2 + \left[ \frac{\partial F}{\partial x_2} s_2 \right]^2 + \dots + \left[ \frac{\partial F}{\partial x_r} s_r \right]^2 \quad (\text{I-17})$$

Na pravých stranách vzťahov (I-15), (I-16) a (I-17) sa do derivácií dosadzujú namerané hodnoty veličín  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . Z týchto vzťahov možno popri určení chyby funkcie aj posúdiť vplyv jednotlivých meraní na chybu výsledku a podľa toho usúdiť, pri ktorých veličinách treba zvýšiť presnosť merania. Preto ich budeme používať vo všetkých prípadoch závislostí.

Výslednú hodnotu veličiny  $y$  vo vzťahu (I-14), resp. medzivýsledky je zbytočné počítať s podstatne väčšou presnosťou, než je presnosť argumentu s najväčšou relatívnou chybou. Odporúča sa výpočtom zvýšiť presnosť medzivýsledku o jedno platné miesto v porovnaní s veličinou s najväčšou relatívnou chybou a ďalšie číslice už neuvádzať. Aj chybu vypočítanú podľa (I-15) zaokrúhlujeme na dve platné číslice. Zaokrúhľovaním čísel sa totiž nedopúšťame, okrem niektorých výnimiek, takej veľkej chyby, ako by sa na prvý pohľad zdalo. Relatívnou chybu zaokrúhleného čísla ľahko možno odhadnúť. Nech  $k$  je prvá platná číslica zaokrúhľovaného čísla a  $n$  je počet platných číslic v zaokrúhlenom čísle. Platnými číslicami môžu byť

nuly na konci čísla, no vždy sú nimi nuly za desatinnou čiarkou, ak sa uvádzajú. Potom relatívna chyba zaokrúhleného čísla je

$$\delta \leq \frac{1}{2k10^{n-1}}$$

čo dostaneme zo spôsobu určovania tabuľkovej chyby. Z toho vyplýva, že relatívna chyba čísel začínajúcich sa číslicou 1 (resp. číslicou 9) pri zaokrúhlení na:

dve platné miesta je menšia než 5 % (resp. 0,56 %)

tri platné miesta je menšia než 0,5 % (resp. 0,056 %)

štyri platné miesta je menšia než 0,05 % (resp. 0,0056 %).

Chyby zaokrúhlených čísel, ktoré sa začínajú číslicou nachádzajúcou sa medzi číslicami 1 a 9, sú medzi uvedenými hodnotami chýb. Väčšinu technických výpočtov stačí teda robiť na tri až štyri platné miesta.

**Príklad 4.** Kruhovým potrubím priemeru  $(4,98 \pm 0,13)$  cm prúdi voda pri teplote  $30^\circ\text{C}$ . Objemový prietok sa meral kalibrovanou nádobou priemeru 34,0 cm, pričom výšku hladiny v nej odčítame s presnosťou  $\pm 0,5$  mm. Kalibrovaná nádoba sa naplnila do stanovenej výšky 40 cm za 12,3 s. Čas sa meral stopkami s presnosťou 0,1 s. Stanovte hodnotu a chybu Reynoldsovo čísla.

**Riešenie:** Reynoldsovo číslo

$$Re = \frac{dw\rho}{\mu}$$

závisí od priemeru potrubia  $d = (0,0498 \pm 0,0013)$  m, od hustoty vody  $\rho = (995,6 \pm 0,05)$   $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , viskozity vody  $\mu = (0,000801 \pm 0,0000005)$  Pa.s a priemernej rýchlosti vody v potrubí  $w$ . Posledné dva číselné údaje sú z [14] a k nim bola stanovená tabuľková chyba. Rýchlosť prúdenia  $w$  sa odmerala nepriamo pomocou objemu  $V$  a času  $\tau$ . Vzťah medzi rýchlosťou a priamo meranými veličinami je

$$w = \frac{V}{S\tau} = \frac{d_k^2 h_k}{\tau d^2}$$

kde priemer kalibrovanej nádoby  $d_k = (0,340 \pm 0,0005)$  m a výška hladiny v nej  $h_k = (0,4000 \pm 0,0005)$  m. Pre úplnosť nameraný čas  $\tau = (12,3 \pm 0,1)$  s. Za rýchlosť do  $Re$  dosadíme jej vyjadrenie pomocou priamo meraných veličín, takže

$$Re = \frac{d_k^2 h_k \rho}{\mu \tau d} = \frac{0,340 \cdot 0,4 \cdot 995,6}{8,01 \cdot 10^{-4} \cdot 12,3 \cdot 0,0498} = 93\,829$$

Pre chybu  $Re$  potom platí :



$$\begin{aligned}\kappa_{Re} &= \frac{\partial Re}{\partial d_k} \kappa_{d_k} + \frac{\partial Re}{\partial h_k} \kappa_{h_k} + \frac{\partial Re}{\partial \rho} \kappa_{\rho} + \left| \frac{\partial Re}{\partial \mu} \right| \kappa_{\mu} + \left| \frac{\partial Re}{\partial \tau} \right| \kappa_{\tau} + \left| \frac{\partial Re}{\partial d} \right| \kappa_d = \\ &= 276 + 117 + 5 + 59 + 763 + 2450 = 3760\end{aligned}$$

Potom  $Re = 93\,800 \pm 3700$

## I - 2 Niektoré numerické a grafické metódy

Často sa stretávame so závislosťami, ktoré sú vyjadrené pomerne zložitou rovnicou (nevlastné integrály, nekonečné rady, viacnásobne zložená funkcia a pod.), takže by bolo veľmi nepohodlné často z nej vypočítavať potrebné hodnoty závisle premennej. V inom prípade nepoznáme teoretickú závislosť medzi veličinami a na základe výsledkov meraní nevíme nájsť empirickú závislosť, ktorá by dostatočne presne aproximovala namerané hodnoty. V takýchto prípadoch udávame závislosť medzi premennými vo forme tabuľky alebo grafu.

### I - 2.1 Numerická interpolácia

V tabuľke hodnôt premenných sú uvedené hodnoty závisle premennej veličiny  $y$  zvyčajne pre ekvidistančné hodnoty argumentu  $x$ , t. j.  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = h$ . Aby sme mohli v tabuľke stanoviť tiež hodnoty  $y$  pre také hodnoty  $x$ , ktoré nie sú uvedené priamo v tabuľke, používame numerickú interpoláciu. Najčastejšie sa postupuje podľa Newtonovho interpolačného polynómu, ktorý je založený na diferenciách. Obmedzíme sa na lineárnu a kvadratickú interpoláciu.

Výber z hodnôt argumentu  $x$ , hodnôt funkcie  $y$  a vypočítané diferencie zostavíme do tab. I-3

Tabuľka I-3

| $x$              | $y$   | $\Delta y$               | $\Delta^2 y$                                                |
|------------------|-------|--------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $x_0$            | $y_0$ |                          |                                                             |
| $x_1 = x_0 + h$  | $y_1$ | $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ |                                                             |
| $x_2 = x_0 + 2h$ | $y_2$ | $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ | $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ |

Potom hodnotu  $y$  pre takú hodnotu argumentu  $x$ , ktorá v tabuľke nie je a nachádza sa medzi hodnotami  $x_0$  a  $x_1$ , nájdeme z lineárneho interpolačného polynómu

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) \quad (\text{I-18})$$

alebo

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (\text{I-19})$$

Tento tvar vyplýva z predpokladu, že funkciu medzi uvedenými bodmi možno s dostatočnou presnosťou nahradiť priamkou. Pri zvýšených požiadavkách na presnosť interpolácie nahrádzame funkciu parabolou druhého stupňa, ktorá prechádza bodmi  $[x_0, y_0]$ ,  $[x_1, y_1]$  a  $[x_2, y_2]$ . Odtiaľ dostaneme tvar príslušného interpolačného polynómu

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \quad (\text{I-20})$$

**Príklad 5.** Hodnoty funkcie chýb  $\text{erf}(z)$  sú dané spolu s vypočítanými diferenciami v nasledujúcej tabuľke, štruktúrou rovnakej ako je tab. I-3. Treba nájsť hodnotu  $\text{erf}(0,507)$

|      |              |              |               |
|------|--------------|--------------|---------------|
| 0,50 | 0,5204998778 |              |               |
| 0,51 | 0,5292436198 | 0,0087437420 |               |
| 0,52 | 0,5378986304 | 0,0086550106 | -0,0000887314 |

**Riešenie:** Na lineárnu interpoláciu použijeme vzťah (I-18). Potom

$$\text{erf}(0,507) = 0,5204998778 + \frac{0,0087437420}{0,01}(0,507 - 0,500) = 0,5266204972$$

Na kvadratickú interpoláciu použijeme vzťah (I-20). Potom

$$\text{erf}(0,507) = 0,5204998778 + \frac{0,0087437420}{0,01}(0,507 - 0,500) + \frac{(-0,0000887314)}{2(0,01)^2} \cdot$$

$$(0,507 - 0,500)(0,507 - 0,510) = 0,5204998778 + 0,0061206194 + 0,0000093168$$

$$\text{erf}(0,507) = 0,5266298140$$

Podľa vzťahu (I-19) možno lineárne interpolovať aj vtedy, keď hodnoty  $x$  nie sú ekvidištančne číselné. Pri kvadratickej interpolácii sa v tomto prípade zmení výpočet diferencií i konečný vzorec. Používajú sa tzv. pomerné diferencie:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad (\text{I-21})$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lineárny interpolačný polynóm má potom tvar

$$y = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \quad (\text{I-22})$$

**Príklad 6.** Časť závislosti entalpie nasýtenej vodnej pary v závislosti od tlaku je v tab. I-5. Nájdite hodnotu entalpie pri tlaku 0,193 MPa.

Tabuľka I-4

| $P$ [MPa] | $h$ [kJ/kg] | $[P_{j-1}, P_j]$ | $[P_{j-1}, P_j, P_{j+1}]$ |
|-----------|-------------|------------------|---------------------------|
| 0,18      | 2702        |                  |                           |
|           |             | 300              |                           |
| 0,20      | 2708        |                  | -1083                     |
|           |             | 170              |                           |
| 0,30      | 2725        |                  |                           |

**Riešenie:** Vypočítame diferencie podľa vzťahov (I-21):

$$[P_0, P_1] = \frac{2708 - 2702}{0,20 - 0,18} = 300$$

$$[P_0, P_1, P_2] = \frac{170 - 300}{0,30 - 0,18} = -1083$$

$$[P_1, P_2] = \frac{2725 - 2708}{0,30 - 0,20} = 170$$

Po dosadení

$$h = 2702 + 300(0,193 - 0,180) - 1083(0,193 - 0,180)(0,193 - 0,20) = 2702 + 10,4 + 0,10 = 2712,5 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

Po zaokrúhlení na presnosť pôvodných údajov dostaneme výslednú hodnotu  $h = 2712 \text{ kJ.kg}^{-1}$ . Pretože člen s druhou diferenciou je menší než tá presnosť, na uvedenú interpoláciu stačí lineárny interpolačný polynóm.

Pri interpolácii funkcie  $z = f(x, y)$  dvoch nezávisle premenných zostavíme výber z hodnôt argumentov  $x, y$  a hodnôt funkcie  $f(x, y)$  do tab. I-5.

Tabuľka I-5

| $x$   | $x_0$         | $x_1$         |
|-------|---------------|---------------|
| $y$   |               |               |
| $y_0$ | $f(x_0, y_0)$ | $f(x_1, y_0)$ |
| $y_1$ | $f(x_0, y_1)$ | $f(x_1, y_1)$ |

Potom Newtonov vzorec lineárnej interpolácie pre hodnoty argumentov  $x, y$  nachádzajúce sa medzi  $x_0$  a  $x_1$ , resp.  $y_0$  a  $y_1$  bude mať tvar

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}{y_1 - y_0}(y - y_0) \quad (\text{I-23})$$



Interpoláčn  polynómy vyšší stupňov sú už pr     zloží. Takisto sú zloží aj interpol  n  polynómy pre funkcie viacerých nezávisle premenných.

**Príklad 7.** Závislosť viskozity vodného roztoku KOH od teploty a zlo  nia roztoku v % hm. je uveden  v tab. I-6. Lineárnou interpoláciou nájdite viskozitu 17%-n ho vodného roztoku KOH pri teplote 32  C.

Tabuľka I-6

| $\mu$ [mPa.s]     |    | $t$ [ C] |      |      |
|-------------------|----|----------|------|------|
|                   |    | 20       | 30   | 40   |
| Zloženie [% hm.] | 10 | 1,23     | 1,00 | 0,83 |
|                   | 20 | 1,63     | 1,33 | 1,11 |
|                   | 30 | 2,36     | 1,93 | 0,83 |

**Riešenie:** Ak teplotu považujeme za premenn   $x$  a hm. zlomok za premenn   $y$ , vtedy podľa označenia vo vzťahu (I-23) je

$$\begin{aligned}x_0 &= 30 \text{  C}, & x_1 &= 40 \text{  C} \\ y_0 &= 10 \text{ % hm.}, & y_1 &= 20 \text{ % hm.}\end{aligned}$$

Pre hodnoty funkcie potom platí:

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= 1,00 \text{ mPa.s}, & f(x_1, y_0) &= 0,83 \text{ mPa.s} \\ f(x_0, y_1) &= 1,33 \text{ mPa.s}, & f(x_1, y_1) &= 1,11 \text{ mPa.s}\end{aligned}$$

Potom

$$\mu(32 \text{  C}, 17 \text{ % hm.}) = 1,0 + \frac{0,83 - 1,0}{40 - 30}(32 - 30) + \frac{1,33 - 1,0}{20 - 10}(17 - 10) = 1,0 - 0,034 + 0,231$$

$$\mu(32 \text{  C}, 17 \text{ % hm.}) = 1,197 \text{ mPa.s}$$

Výsledok treba zaokrúhliť na dve desatinn  miesta podľa presnosti zadaných údajov, takže  $\mu = 1,20 \text{ mPa.s}$ .

## I - 2.2 Numerick  integrácia

S     ou riešenia nejakého problému často býva výpočet ur     ho integrálu zo známej funkcie v zadaných medziach. Ak ur      integrál z ak       vek dôvodov nevieme vypočúť analyticky, t. j. pomocou primitívnej funkcie, dá sa ur      jeho pribli  n  hodnota vhodnými metódami, napr. numerickou integráciou.

Numerick  integrácia je zalo  en  na vhodnom vyjadren   ur     ho integrálu pomocou hodnôt funkcie, ktor   vieme zistiť (vypočúť alebo odmerať). Existuje ve  k   množstvo integračných vzorcov numerickej integrácie, z ktor     si uvedieme aspoň dva.

Rozdelíme interval  $\langle a, b \rangle$ , v ktorom m  ame ur      hodnotu integrálu, na  $n$    ast   :  $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ . Nech k týmto hodnotám argumentu poznáme zo sp     bu zadania funkcie pr  slu  n  hodnoty funkcie  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ . Za predpokladu, že medzi každými dvoma susednými bodmi možno funkciu nahradiť priamkou, hodnotu integrálu možno vypočúť

podľa lichobežníkového vzorca

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad (\text{I-24})$$

Ak interval  $\langle a, b \rangle$  delíme ekvidištane, t. j. pre  $h = \frac{b-a}{n}$  je každé  $x_i = x_{i-1} + h$ , lichobežníkový vzorec sa zjednoduší:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n] \quad (\text{I-25})$$

Lichobežníkové vzorce (I-24) a (I-25) sa výhodne používajú vtedy, keď hodnoty funkcie sú zistené empiricky, t. j. s náhodnými chybami.

Pri zvýšených nárokoch na presnosť integrácie a v prípade analytického zadania funkcie rozdelíme interval integrácie  $\langle a, b \rangle$  na párny počet častí  $n = 2m$ , čiže dostaneme  $m$  dvojintervalov rovnakej dĺžky. Funkciu v každom dvojintervale nahradíme parabolou druhého stupňa a tak dostaneme Simpsonov vzorec

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3.2m} [y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \quad (\text{I-26})$$

Uvedené rovnosti platia len približne. Takto sa dá integrovať aj funkcia zadaná graficky, poradnice  $y_i$  odčítavame z grafu. Ak je funkcia daná tabuľkou hodnôt a argument nie je delený ekvidištane, tak v prípade použitia Simpsonovho vzorca treba tabuľku upraviť na rovnaký krok argumentu numerickou interpoláciou.

**Príklad 8.** Vypočítajte integrál

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

**Riešenie:** Uvedený integrál sa nedá vypočítať analyticky. Použijeme preto numerickú integráciu. Interval  $\langle 0; 2 \rangle$  rozdelíme ekvidištane napríklad s krokom 0,25. Tak dostaneme 8 intervalov a môžeme zostaviť tabuľku:

| $i$        | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8 = n  |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$        | 0,00   | 0,25   | 0,50   | 0,75   | 1,00   | 1,25   | 1,50   | 1,75   | 2,00   |
| $e^{-x^2}$ | 1,0000 | 0,9394 | 0,7788 | 0,5698 | 0,3679 | 0,2096 | 0,1054 | 0,0468 | 0,0183 |

a/ Lichobežníkový vzorec : Dosadíme do vzorca (I-26):

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{2-0}{2.8} [1 + 2(0,9394 + 0,7788 + 0,5698 + 0,3679 + 0,2096 + 0,1054 + 0,0468) + 0,0183]$$

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,8817$$

Simpsonov vzorec, kde  $2m = n = 8$ , preto  $m = 4$ : Dosadíme do vzorca (I-26):

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{2-0}{3 \cdot 2 \cdot 4} \left[ 1 + 0,0183 + 2(0,7788 + 0,3679 + 0,1054) + 4(0,9394 + 0,5698 + 0,2096 + 0,0468) \right]$$

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,8821$$

Z týchto výsledkov možno vypočítať napríklad hodnotu pravdepodobnostnej funkcie  $\text{erf}(z)$ . Jej názov pochádza z anglického pomenovania „error function“, teda funkcia chýb. Tak dostaneme:

$$\text{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} 0,8817 = 0,9949$$

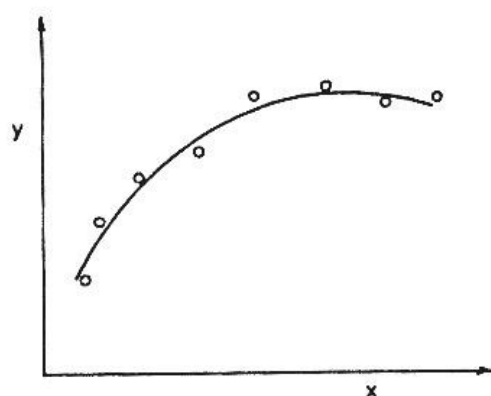
podľa výsledku dosiahnutého použitím lichobežníkového vzorca,

$$\text{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} 0,8821 = 0,9953$$

podľa výsledku dosiahnutého použitím Simpsonovho vzorca. Ak to porovnáme s tabuľkovou hodnotou  $\text{erf}(2) = 0,9953222650$ , nie sú to až také nepresné hodnoty, najmä výsledok dosiahnutý použitím Simpsonovho vzorca.

## I- 2.3 Grafické zobrazenie údajov a grafická interpolácia

Podkladom na zostrojenie grafického znázornenia funkcie jednej nezávisle premennej sú namerané hodnoty, resp. vypočítané hodnoty. Pri vypočítaných hodnotách nemusíme brať do úvahy náhodné chyby, preto týmito bodmi preložíme spojitú krivku. Preloženie krivky nameranými hodnotami komplikujú náhodné chyby, ktorými sú merania zaťažené. Krivky preto nevedieme priamo cez namerané body, ale tak, aby krivka prebiehala plynule a čo najbližšie k daným bodom (plná čiara na obr. I-2). Pritom sa má počet bodov nad krivkou približne rovnať počtu bodov pod krivkou, pretože náhodné chyby sa vyskytujú približne rovnako často s kladným i záporným znamienkom. Takisto sa má vo väčšine prípadov striedať bod nad krivkou s bodom pod krivkou, alebo aspoň nemá byť viac bodov za sebou, ktoré by ležali na jednej strane krivky. Pred zostrojením krivky treba uvážiť, či pri skúmanom jave nedochádza k náhlej zmene parametrov sústavy.



Obr. I - 2. Preloženie krivky empiricky zistenými bodmi

Pri grafickom znázornení číselných údajov je dôležitá voľba úsečky, ktorá zobrazuje jednotkovú zmenu veličiny. Dĺžka tejto úsečky sa nazýva modul zobrazenia. Zhora je modul obmedzený tým, že celé zobrazenie má vojsť do nákresne. Ak sa teda majú na úsečku dĺžky  $L$  [cm] zobrazit' čísla  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tak, aby sa  $x_0$  zobrazilo na začiatok a  $x_n$  najďalej na koniec tej úsečky, pre modul  $m(x)$  musí platiť nerovnosť

$$m(x) \leq \frac{L}{x_n - x_0} \quad [\text{cm}] \quad (\text{I-27})$$

Zdola je modul obmedzený tým, že najmenší interval veľkosti  $h$ , aký bude treba ešte rozlišovať (tzv. grafický interval), nemá byť menší ako 1 mm:

$$m(x) \geq \frac{1}{10h} \quad [\text{cm}] \quad (\text{I-28})$$

Skutočná hodnota modulu bude nejaká zaokrúhlená hodnota vyhovujúca obidvom nerovnostiam. Ak napr. chceme naniesť na úsečku dĺžky najviac 28 cm (milimetrový papier formátu A4) teplotnú stupnicu v rozsahu  $0^\circ\text{C}$  až  $100^\circ\text{C}$  s presnosťou odčítavania  $1^\circ\text{C}$ , musí modul vyhovovať nerovnosti

$$\frac{1}{10 \cdot 1} \leq m \leq \frac{28}{100 - 0} \quad \text{čiže} \quad 0,1 \leq m \leq 0,28$$

Vhodná voľba modulu je  $m = 0,2$  cm. Vtedy zmene teploty o  $1^\circ\text{C}$  zodpovedá dĺžka 2 mm.

Ak zobrazujeme funkciu  $y = f(x)$  vo forme grafu, volíme podľa uvedených pravidiel dva samostatné moduly, a to  $m(x)$  pre argument a  $m(y)$  pre hodnoty funkcie. Pri vynášaní empiricky zistených údajov, t. j. údajov zaťažených náhodnými chybami, musí sa ešte zladit' veľkosť modulu a grafického intervalu hodnôt funkcie s veľkosťou náhodných chýb. Zbytočné zväčšovanie modulu môže totiž zvýrazňovať chyby merania na úkor skutočnej zmeny hodnoty, tým skresľovať priebeh funkcie a sťažovať správne zakreslenie krivky. V takýchto prípadoch volíme radšej menší modul, ktorý chyby merania až natoľko nezvýrazňuje.

Pri grafickom znázornení funkcie často musíme odčítavať aj hodnoty, ktoré nie sú priamo zakreslené kótovacími čiarami na súradnicových osiach. Tu sa nespoliehame na hrubý odhad, ale použijeme grafickú interpoláciu.

Nech zmene argumentu z  $x_0$  na  $x_0 + h$  zodpovedá zmena o  $a$  [cm] a príslušnej zmene hodnoty funkcie z  $y_0$  na  $y_0 + k$  zodpovedá zmena o  $b$  [cm]. Potom zmene argumentu z  $x_0$  na zadanú hodnotu  $x_0 + h_1$ ,  $0 < h_1 < h$ , zodpovedá úsečka dĺžky  $a_1$  [cm], pričom

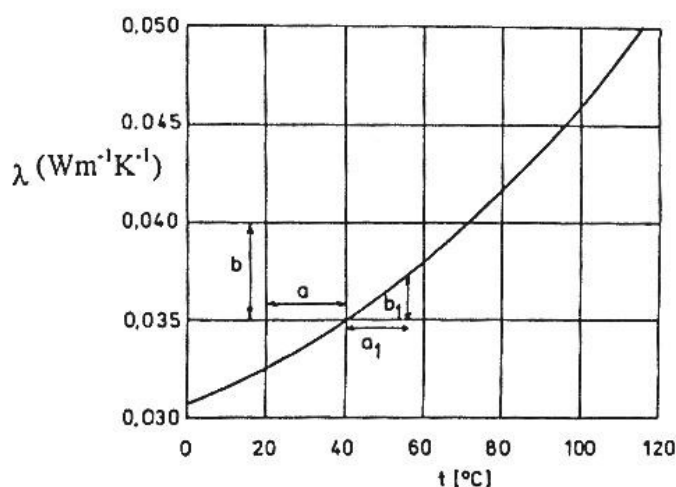
$$a_1 = \frac{h_1}{h} a$$

Zo zobrazenej závislosti odmeriame dĺžku  $b_1$  [cm], zodpovedajúcu zmene funkcie o hľadané

t. j. z  $y_0$  na  $y_0 + k_1$ . Potom

$$k_1 = \frac{b_1}{b} k$$

Význam použitých symbolov je zrejmý z obr. I-3, na ktorom sa nachádza závislosť tepelnej vodivosti metánu od teploty. Hodnotu napr. pre  $t = 56^\circ\text{C}$  určíme takto:



Obr. I - 3. Závislosť tepelnej vodivosti metánu od teploty

Zmene teploty o  $20^\circ\text{C}$  zodpovedá úsečka dĺžky  $0,9\text{ cm}$ , potom zmene teploty o  $16^\circ\text{C}$  zodpovedá úsečka dĺžky

$$a_1 = \frac{16}{20} 0,9 = 0,72\text{ cm}$$

K tejto hodnote z grafu odčítame dĺžku  $b_1 = 0,5\text{ cm}$ . Pretože je  $k = 0,005$  a  $b = 1,1\text{ cm}$ , hľadaný prírustok je

$$k_1 = \frac{0,5}{1,1} 0,005 = 0,0023$$

Potom pre  $t = 56^\circ\text{C}$  je  $\lambda = 0,035 + 0,0023 = 0,0373\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

## I - 2.4 Stupnice funkcií a grafické papiere

Nech je daná funkcia  $y = f(x)$  definovaná a spojitá v uzavretom intervale  $\langle a, b \rangle$ . Nech funkcia  $f(x)$  je v tomto intervale rýdzo monotónna, t. j. len rastúca alebo len klesajúca. Takú funkciu možno graficky znázorniť stupnicou.

Stupnica je množina kótovaných bodov na čiare, t. j. bodov, ktorým sú priradené čísla. Čiara sa nazýva nositeľka stupnice, najčastejšie sa používa priamka. Musí byť orientovaná a musí mať vyznačený začiatok stupnice, tzv. grafickú nulu. Kóty priradíme bodom tejto priamky podľa zobrazovacej rovnice

$$\xi = \alpha \cdot f(x) \tag{I-29}$$

kde  $\alpha$  je modul zobrazenia, pre voľbu ktorého platia podmienky (I-27) a (I-28), a  $\xi$  je grafická súradnica bodu na priamke, ktorý má kótu  $x$ . Grafická súradnica teda môže byť aj záporná. Stupnicu funkcie pri zvolenom module zostrojíme takto:

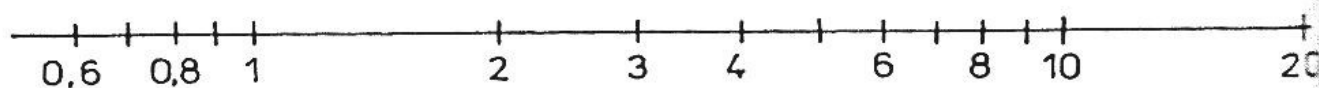


1. Pre zvolené  $x_k \in \langle a, b \rangle$  určíme hodnotu  $f(x_k)$ .
2. Podľa zobrazovacej rovnice (I-29) určíme grafickú súradnicu  $\xi_k$ .
3. Od začiatku (grafickej nuly) vynesieme súradnicu  $\xi_k$  na nositeľke stupnice, a to i so znamienkom.
4. Polohu bodu so súradnicou  $\xi_k$  vyznačíme deliacou priečkou kolmo na nositeľku stupnice.
5. K vyznačenému bodu pripíšeme číslo  $x_k$  ako kótu.

Tento postup si ukážeme na konštrukcii logaritmickkej stupnice dekadického logaritmu pre  $x \in \langle 1, 10 \rangle$  pri module  $\alpha = 10$  cm. Výpočty sú v nasledujúcej tabuľke:

| $x$         | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\log x$    | 0,000 | 0,301 | 0,477 | 0,602 | 0,699 | 0,778 | 0,843 | 0,903 | 0,954 | 1,000 |
| $10 \log x$ | 0,00  | 3,01  | 4,77  | 6,02  | 6,99  | 7,78  | 8,43  | 9,03  | 9,54  | 10,00 |

Na vodorovnej priamke ako nositeľke stupnice zvolíme začiatok a kladný smer napravo od začiatku. Pretože  $10 \cdot \log 1 = 0$ , pripíšeme začiatku, čiže bodu  $\xi = 0$ , kótu 1. Pre ďalší bod stupnice platí  $10 \cdot \log 2 = 3,01$  cm, preto vynesíme túto vzdialenosť doprava od začiatku a tomuto bodu pripíšeme kótu 3, atď. Ak je uvedené delenie hrubé, zjemníme ho umiestnením ďalších bodov s kótami napríklad 1,2 ; 1,4 ; 1,6 atď. Vypočítaná stupnica logaritmickkej funkcie je na obr. I-4. Na tento tzv. základný úsek môže nadväzovať úsek pre  $x \in \langle 0,1; 1 \rangle$ , atď.



Obr. I - 4. Stupnica logaritmickkej funkcie

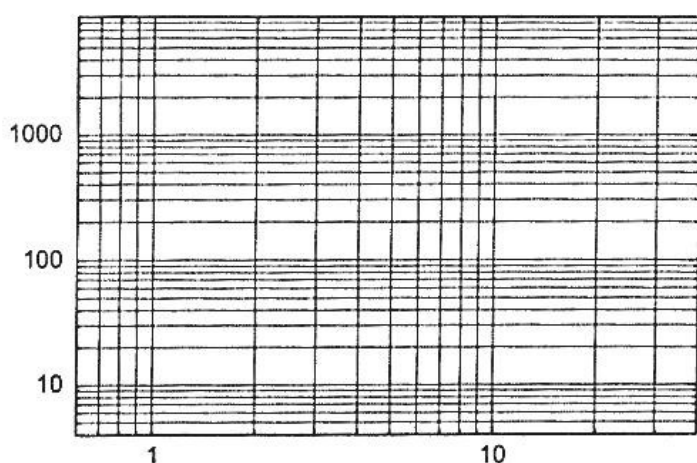
Stupnica funkcie sama osebe nemá nejaký význam. Význam nadobudne až v spojení s inými grafickými prvkami. Stupnice dvoch funkcií často zostavujeme do sietí funkcií.

Nech sú dané dve spojité a rýdzo monotónne funkcie  $f(x)$  a  $g(y)$ . V nákrese narysujeme na seba kolmé priamky, ktoré budú slúžiť ako osi s označením  $\xi$ ,  $\eta$ . Na osi  $\xi$  (vodorovná priamka) zostrojíme stupnicu funkcie  $f(x)$  podľa zobrazovacej rovnice (I-29) a v deliacich bodoch tejto stupnice zostrojíme rovnobežky s druhou osou  $\eta$ . Na osi  $\eta$  (zvislá priamka) zostrojíme stupnicu funkcie  $g(y)$  podľa zobrazovacej rovnice

$$\eta = \beta \cdot g(y)$$

a v deliacich bodoch tejto stupnice zostrojíme rovnobežky s osou  $\xi$ . Tak dostaneme sieť funkcií. Časť nákresu so sieťou funkcií sa nazýva grafický papier. Moduly  $\alpha$ ,  $\beta$  možno voliť nezávisle od seba a tak dosiahnuť umiestnenie celého problému na nákresňu.

Niektoré grafické papiere sa vyrábajú priemyselne a dostať ich kúpiť. Mnohé treba zostrojiť podľa vlastnej potreby. Avšak aj mnohé priemyselne vyrábané grafické papiere majú nevhodné moduly, takže často aj tieto grafické papiere treba zostrojiť s vhodnejšími modulmi. Na obr. I-5 je ukážka logaritmického papiera, čiže pre funkcie  $f(x) = \log x$ ,  $g(y) = \log y$ , pričom moduly sme zvolili,  $\alpha = 4$  cm,  $\beta = 1,5$  cm.



Obr. I - 5. Logaritmický papier

### I - 3 Vyrovnávanie experimentálnych údajov

Výsledky meraní často vedú ku vzťahom medzi tými veličinami, ktoré podľa rozličných závislostí významne ovplyvňujú priebeh sledovaného deja. Tvar takej závislosti môže byť daný teoretickým rozborom deja na základe istej modelovej predstavy, alebo sa zisťuje porovnaním grafického zobrazenia nameraných hodnôt s grafickým zobrazením známych funkcií.

Nech závislosť medzi dvoma veličinami  $x, y$  má tvar

$$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k) \quad (\text{I-30})$$

príčom tvar funkcie  $f$  považujeme za známy. Na základe nameraných hodnôt  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$  treba určiť také hodnoty neznámych parametrov  $a_1, \dots, a_k$  v závislosti (I-30), aby uvedená závislosť čo najlepšie vyhovovala nameraným hodnotám. Pritom predpokladáme, že  $n > k$  a že všetky merania  $y_i$  sú rovnako spoľahlivé, čiže majú rovnaký rozptyl.

Ak by merania boli presné, t. j. nezaťažené chybami, stačilo by z množiny dvojíc  $[x_i, y_i]$  vybrať ľubovoľných  $k$  dvojíc. Ich postupným dosadzovaním do (I-30) by sme dostali  $k$  rovníc, z ktorých by sme vhodnou metódou určili neznáme hodnoty parametrov. Iné vybrané dvojice by dali tie isté výsledky. Avšak preto, že merania sú zaťažené chybami, je tento postup nevhodný. V ďalšom sa oboznámime s vhodnými metódami na riešenie tejto úlohy.

### I - 3.1 Metóda najmenších štvorcov

Metóda najmenších štvorcov vyžaduje určiť také hodnoty neznámych vo vzťahu (I-30), aby súčet štvorcov odchýlok medzi nameranými hodnotami  $y_i$  a vypočítanými hodnotami  $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$

bol minimálny:

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_k)]^2 = \min \quad (\text{I-31})$$

Pre lineárnu závislosť  $y = a + bx$  (pre lepšie rozlíšenie píšeme tento tvar namiesto  $a_1 + a_2x$ ) má táto podmienka tvar

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = \min.$$

a bude splnená, keď

$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = 0$$

t. j. keď

$$\begin{aligned} n a + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned} \quad (\text{I-32})$$

Tento systém rovníc umožňuje určiť také hodnoty  $a, b$ , ktoré majú vyžadovanú vlastnosť, vyjadrenú vzťahom (I-31). Pre parabolu druhého stupňa

$$y = a + bx + cx^2$$

obdobným spôsobom dostaneme systém rovníc:

$$\begin{aligned} n a + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{aligned}$$

Analogicky sa riešia aj paraboly vyšších stupňov.

Takáto aplikácia metódy najmenších štvorcov je obmedzená dvoma základnými predpokladmi:

1. Funkcia (I-31) musí byť lineárna vzhľadom na hľadané parametre, t. j. musí mať tvar

$$f(x; a_1, a_2, \dots, a_k) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x)$$

2. Náhodné chyby, ktorými sú zaťažené hodnoty  $x_i$ , sú nulové, alebo aspoň veľmi malé v porovnaní s náhodnými chybami hodnôt  $y_i$ .

Tento predpoklad nie je splnený napríklad pre mocninovú a exponenciálnu funkciu

$$y = ax^b, \quad y = ae^{bx} \quad (\text{I-33})$$

Číslove závislosti možno linearizovať vzhľadom na parametre logaritmovaním. Tak pre mocninovú funkciu dostaneme:

$$\log y = \log a + b \log x \quad (\text{I-34})$$

Uznačením

$$\log y = Y, \log a = A, \log x = X$$

dostaneme lineárnu závislosť medzi veličinami  $X$  a  $Y$  v tvare

$$Y = A + bX$$

Dosaďením týchto výrazov do rovníc (I-32) a vrátením sa k pôvodnému označeniu dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} n \log a + b \sum \log x_i &= \sum \log y_i \\ \log a \sum \log x_i + b \sum (\log x_i)^2 &= \sum \log x_i \log y_i \end{aligned} \quad (\text{I-35})$$

Logaritmovaním dosiahneme linearizáciu aj exponenciálnej funkcie a obdobným postupom dostaneme systém rovníc

$$\begin{aligned} n \log a + b \log e \sum x_i &= \sum \log y_i \\ \log a \sum x_i + b \log e \sum x_i^2 &= \sum x_i \log y_i \end{aligned} \quad (\text{I-36})$$

prídom  $\log e \doteq 0,43429$ , resp. systém rovníc s prirodzenými logaritmami

$$\begin{aligned} n \ln a + b \sum \ln y_i &= \sum \ln y_i \\ \ln a \sum x_i + b \sum x_i^2 &= \sum x_i \ln y_i \end{aligned} \quad (\text{I-37})$$

keďže možno vypočítať hodnoty  $a$ ,  $b$ .

Z linearizovaných tvarov oboch funkcií vyplýva, že exponenciálna funkcia sa zobrazí ako priamka na semilogaritmickej papieri, t. j. v súradniciach  $[x; \log y]$  a mocninová funkcia sa zobrazí ako priamka na logaritmickej papieri, t. j. v súradniciach  $[\log x; \log y]$ . Toto sú súčasne aj grafické kritériá na použitie spomenutých funkcií, ak nie sú predpísané iným spôsobom.

Sústava rovníc (I-35) určuje také hodnoty  $a$ ,  $b$ , že súčet štvorcov odchýlok pre lineárizovanú závislosť (I-34) je minimálny, a nie súčet štvorcov odchýlok pre pôvodnú mocninovú závislosť. Je to spôsobené tým, že pôvodne rovnaká spoľahlivosť meraní, reprezentovaná rovnakou presnosťou, sa logaritmickou transformáciou zmení. Podobná situácia je aj pri exponenciálnej funkcii. Táto nezhoda sa dá často odstrániť zavedením váhovej funkcie.

**Príklad 9.** Pri fluidizácii tuhých častíc vzduchom boli v nehybnej vrstve častíc namerané tieto hodnoty straty tlaku  $\Delta P$  v závislosti od priemernej rýchlosti  $w$ :

|                                                  |      |      |      |       |       |       |       |
|--------------------------------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $w \cdot 10^{-3} [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$ | 7,13 | 7,99 | 9,16 | 10,35 | 11,05 | 12,22 | 15,28 |
| $\Delta P$ [Pa]                                  | 315  | 406  | 475  | 575   | 654   | 740   | 832   |

Nájdite vzťah medzi stratou tlaku a priemernou rýchlosťou.

**Riešenie:** Zo základného kurzu chemického inžinierstva je známe, že hľadaná závislosť straty tlaku od rýchlosti tekutiny je v logaritmických súradniciach lineárna. Z toho vyplýva jej tvar

$$\Delta P = a(w)^b$$

Hodnoty  $a$ ,  $b$  nájdeme podľa rovníc (I-36). Potrebné výpočty na určenie koeficientov v rovniciach (I-36) sú v tab. I-7.

Podľa uvedených výpočtov prejde systém (I-36) do tvaru

$$7 \log a - 13,95297 b = 19,14813$$

$$-13,95297 \log a + 27,887994 b = -38,068680$$

Riešením dostaneme  $a = 217\,300$ ,  $b = 1,3052$ , takže závislosť medzi priemernou rýchlosťou a stratou tlaku má tvar

$$\Delta P = 217\,300 w^{1,3052}, \quad [w] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad [\Delta P] = \text{Pa}$$

Tabuľka výpočtov na určenie vzťahu  $\Delta P = aw^b$  logaritmickou transformáciou Tabuľka I - 7

| $w$     | $\Delta P$ | $\log w$  | $\log \Delta P$ | $(\log w)^2$ | $\log w \cdot \log \Delta P$ | $\Delta P_v$ | $\frac{\Delta P_v}{\Delta P} - 1$ |
|---------|------------|-----------|-----------------|--------------|------------------------------|--------------|-----------------------------------|
| 0,00713 | 315        | -2,14691  | 2,49831         | 4,60922      | -5,363647                    | 343          | 0,089                             |
| 0,00799 | 406        | -2,09745  | 2,60853         | 4,39929      | -5,471261                    | 398          | -0,020                            |
| 0,00916 | 475        | -2,03810  | 2,67669         | 4,15385      | -5,455362                    | 475          | 0,000                             |
| 0,01035 | 575        | -1,98506  | 2,75967         | 3,94046      | -5,478110                    | 557          | -0,031                            |
| 0,01105 | 654        | -1,95664  | 2,81558         | 3,82844      | -5,509076                    | 607          | -0,072                            |
| 0,01222 | 740        | -1,91293  | 2,86923         | 3,65930      | -5,488636                    | 692          | -0,065                            |
| 0,01528 | 832        | -1,81588  | 2,92012         | 3,29742      | -5,302588                    | 927          | 0,114                             |
|         |            | -13,95297 | 19,14813        | 27,88799     | -38,068680                   |              |                                   |

Vypočítané hodnoty straty tlaku  $\Delta P_v$  a relatívne odchýlky sú uvedené v posledných dvoch stĺpcoch tab. I-7.